

# Determinare la massa dei corpi del Sistema Solare

Daniele Gasparri

La determinazione della massa dei corpi celesti è una delle misurazioni in assoluto più difficili da effettuare, non tanto per difficoltà teoriche, quanto per veri e propri muri osservativi.

La misura della massa è il normale passo in avanti nello studio dei corpi del sistema solare; essa è utile per capire un'infinità di cose, tra le quali, le più importanti sono:

- 1) Determinazione esatta orbite, in particolare del centro di massa
- 2) Determinazione della densità media e quindi della composizione chimica, nonché prime ipotesi sulla struttura interna e sulla stessa dinamica del pianeta, come eventuale presenza di un campo magnetico, presenza ed eventuale evoluzione dell'atmosfera
- 3) Importanti indizi sulla nascita ed evoluzione del sistema solare, a partire dalle condizioni della sua nascita
- 4) Importanti conseguenze direttamente sull'astronautica; conoscere la massa di un corpo celeste è assolutamente condizione necessaria affinché si possa inviare con successo una sonda nella sua orbita o nella sua superficie.
- 5) Conoscere la massa del Sole o della nostra Luna significa avere importanti informazioni sull'evoluzione stellare e sul noto fenomeno delle maree.

Ora che sappiamo a cosa serve la massa, siamo in grado di dire cosa essa sia? Il concetto di massa, pur essendo sotto i nostri occhi ogni giorno della nostra vita, è in assoluto uno dei concetti più difficili da spiegare e da far capire; molti di voi probabilmente confonderanno la massa con il peso di un oggetto; effettivamente questa è opinione abbastanza diffusa, e lo dimostra il fatto che nella vita di tutti i giorni usiamo come unità di misura del peso il Kg, che in realtà è unità di misura della massa, e consideriamo i termini massa e peso come sinonimi. In realtà questo è totalmente sbagliato; la massa è una speciale proprietà della materia, che si può misurare attraverso delle importanti relazioni, tutte scoperte da Newton, ormai qualche secolo fa.

Di sicuro la massa non è il peso di un oggetto; piuttosto il peso di un oggetto è la conseguenza dello "strano" comportamento che ha la materia in quanto dotata di massa.

Non è tutto; possiamo ancora complicarci la vita, dicendo che esistono due tipi di massa: la massa inerziale e la massa gravitazionale.

Per capire meglio il tutto, possiamo cominciare con il dimenticare tutto quello che crediamo di sapere sulla massa, e cercare di seguire un discorso logico:

Fu lo stesso Newton ad osservare che ogni corpo in quiete o in moto rettilineo uniforme, in un sistema di riferimento inerziale (cioè non accelerato) se sottoposto ad una forza, cambia il suo stato di moto, in particolare la sua velocità. Ogni corpo, al quale viene applicata una forza subisce un'accelerazione. Questo è abbastanza semplice da notare nelle comuni esperienze; meno scontano è capire che nulla cambia se il corpo si trova in quiete o in moto rettilineo uniforme; la forza cambia il vettore velocità; ogni forza produce un'accelerazione, indipendentemente dallo stato di moto rettilineo uniforme o di quiete che si aveva prima (principio di relatività Galileiano). Newton fu un grado di capire che l'entità dell'accelerazione di un corpo era sicuramente proporzionale alla forza applicata, ma anche ad un'altra grandezza, tipica del corpo: la massa inerziale. Da queste

considerazioni nacque la famosa seconda legge di Newton:  $F = \frac{d^2 p}{dt^2} = m_i \frac{dv}{dt} = m_i a$  dove p

=quantità di moto dell'oggetto ( $p=mv$ ),  $a$ = accelerazione,  $m_i$ =massa inerziale; maggiore è la massa inerziale, maggiore è la forza che devo applicare per avere una stessa accelerazione; in questo caso la massa quindi rappresenta la resistenza che un corpo ha a cambiare il suo stato di quiete o di moto

rettilineo uniforme: corpi con massa minore vengono accelerati di più rispetto a corpi di massa maggiore, a parità di forza applicata.

La massa (inerziale) esiste a prescindere dall'ambiente dove si trova il corpo, sia esso sulla superficie terrestre o nel profondo spazio in completa assenza di gravità.

La massa gravitazionale è un'altra proprietà della materia ma che non ha alcun legame fisico con la sua massa inerziale; come abbiamo appena visto quest'ultima è una costante di proporzionalità tra la forza applicata e l'accelerazione subita; lo stesso discorso vale per la forza di gravità.

Fu infatti sempre lo stesso Newton a capire il motivo per il quale ogni corpo sulla superficie terrestre cada sulla superficie; questa potrebbe essere un'osservazione banale, ma quanti di voi si sono chiesti ed hanno veramente capito il perché gli oggetti cadono?

Newton riuscì a rispondere a questa (apparentemente) banale domanda; esso capì che tra due corpi esiste una forza, sempre attrattiva, inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza e proporzionale ad una costante, detta costante di gravitazione universale e a delle grandezze che descrivono in qualche modo le proprietà dei corpi in gioco, dette appunto masse gravitazionali.

Newton fu in grado di capire che la forza che riesce a far cadere una mela da un albero è responsabile del moto dei pianeti e dell'intero universo.

Egli fu quindi in grado di capire l'entità di questa forza, sempre attrattiva:  $F = \frac{Gm_{1g}m_{2g}}{r_{1,2}^2}$ . (in realtà

questa formula vale per un sistema a simmetria sferica) Le masse  $m_{1g}$  e  $m_{2g}$  sono chiamate masse gravitazionali e descrivono le proprietà dei corpi di attrarre altri corpi; sulla base delle due definizioni date, si capisce che le masse inerziali e gravitazionali non sono in alcun modo legate, e non c'è quindi nessun motivo fisico evidente per il quale per uno stesso corpo queste due proprietà debbano essere uguali.

Ma si sa che la Natura spesso ama sorprendere, e ben presto si capì che pur non avendo nessun legame apparente, i valori delle due masse coincidono perfettamente! La massa inerziale e la massa gravitazionale, pur descrivendo due proprietà completamente diverse della materia, hanno in realtà lo stesso identico valore!

Fu il fisico ungherese Etvos che per primo cercò di misurare la differenza tra massa gravitazionale ed inerziale con una serie di esperimenti; egli, con grande stupore trovò due valori completamente identici, anche se involontariamente, fu lo stesso Galilei a provare questo.

Infatti egli notò che, in assenza di attrito, tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione, indipendente dalla loro massa; una piuma e un pesante masso, cadono esattamente con la stessa accelerazione e, se lasciati cadere allo stesso istante, toccano terra contemporaneamente.

Questo comportamento è giustificabile dal punto di vista fisico, solo assumendo che la massa inerziale è uguale a quella gravitazionale; infatti la seconda legge di Newton afferma che un corpo sottoposto ad una forza subisce un'accelerazione:  $F = m_i a$ , mentre la legge di gravitazione (sempre

dello stesso Newton) ci dice che ogni corpo subisce una forza pari a:  $F = \frac{Gm_{1g}m_{2g}}{r_{1,2}^2}$ , e quindi in

definitiva si ha:  $F = m_i a = \frac{Gm_{1g}m_{2g}}{r_{1,2}^2}$  e quindi:  $a = \frac{Gm_{1g}m_{2g}}{r_{1,2}^2 m_i}$ ; siccome l'accelerazione è

indipendente dalla massa del corpo, allora deve essere  $m_i = m_{1g}$  e quindi:  $a = \frac{Gm_2}{r_{1,2}^2}$ . Questo, sulla

superficie terrestre si riconduce a:  $g = \frac{GM_E}{r_E^2}$  dove  $M_E$  = massa della Terra,  $r_E$  = raggio della Terra

e  $g$  = accelerazione di gravità: questa è l'accelerazione con la quale ogni corpo, indipendentemente dalla sua massa, cade sul suolo terrestre, verso il centro della Terra.

Oltre ad aver capito che massa inerziale e gravitazionale hanno lo stesso valore (pur essendo concettualmente due cose diverse!), siamo arrivati ad una relazione molto potente che ci consente di misurare direttamente la massa della Terra, conoscendo semplicemente il suo raggio e l'accelerazione con cui un corpo cade.

L'unica incognita, di cui non abbiamo ancora parlato è la costante G, detta costante di gravitazione universale. Essa è una costante della Natura, e il suo valore è sempre tale a prescindere dalla forma dei corpi e dalle loro posizioni.

A dire la verità, il valore della costante di gravitazione universale, è il più difficile da misurare di tutte le costanti della natura; esso infatti si può calcolare soltanto studiando attentamente le interazioni gravitazionali tra due oggetti, ma il problema è che **la forza di gravità è di gran lunga la più debole delle forze della natura**, con la conseguenza che servono masse enormi per notare un qualche effetto, o avere delle precisioni di misurazione che richiedono una certa tecnologia.

Non a caso, il valore di G fu sconosciuto fino al famoso esperimento di Cavendish, effettuato nel 1798, e quindi più di 100 anni dopo che Newton la propose come legge della natura.

Attualmente il valore di G non è conosciuto con la stessa precisione delle altre costanti della natura,

e vale:  $G = (6.67259 \pm 0.00085) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ .

Sappiamo quindi ora cosa sia in realtà la massa, ma il peso cosa è? Il peso altro non è che la forza con cui un corpo, di massa m, è attratto verso il centro della Terra dal suo campo gravitazionale.; in altre parole la forza peso è la forza di gravità che un corpo subisce in quanto si trova sulla

superficie terrestre; esso è chiaramente legato alla massa; infatti si ha:  $F = m_1 a = \frac{G m_1 m_E}{r_{1,2}^2}$ ; ma

$g = \frac{GM_E}{r_E^2}$  e quindi  $F_p = m_1 g$ ; il peso non è altro che la massa dell'oggetto moltiplicata per

l'accelerazione di gravità. Chiaramente se conosciamo il peso e l'accelerazione di gravità siamo in grado di conoscere facilmente la massa del corpo, e naturalmente anche viceversa. Il peso tuttavia, oltre ad avere un'unità di misura che non siamo abituati a vedere (N= Newton) è chiaramente dipendente dal valore dell'accelerazione di gravità e quindi il peso è una qualcosa che dipende da dove il corpo si trova; se abbiamo un oggetto di massa m=1Kg sulla terra, allora esso peserà 9.8N, in quanto l'accelerazione media di gravità è di  $9.8 \text{ m/s}^2$ ; sulla luna esso peserà 6 volte di meno, perché la gravità lunare è 1/6 di quella terrestre; è chiaro però che la sua massa è sempre la stessa! Nella vita di tutti i giorni, siccome tra massa e peso c'è solo una costante di proporzionalità, è normale confondere i due termini ed assumerli quasi come sinonimi; l'importante è capire bene che in realtà sono due cose completamente diverse!

Una curiosità: ma le bilance, cosa misurano? La massa o il peso? In realtà quasi tutte le bilance misurano il peso (sono dei dinamometri) e poi tramite la costante di proporzionalità ci danno il risultato in Kg, e quindi una massa. Cosa succede però se portiamo una normale bilancia pesapersone sulla Luna? Succede che essa ci da un valore diverso; secondo la bilancia la nostra massa è cambiata, ma in realtà solo il nostro peso è cambiato; l'errore deriva dal fatto che la costante di proporzionalità è rimasta sempre la stessa, e cioè g.

## LA DETERMINAZIONE DELLA MASSA DEI CORPI CELESTI

Dopo aver spiegato brevemente la forza di gravità e cosa sia la massa, andiamo a vedere come poterla calcolare; Il nostro obiettivo è ora quello di trovare dei metodi per stimare la massa dei corpi celesti, dalla Terra al più piccolo asteroide, passando per il nostro Sole.

Ci sono sostanzialmente 3 metodi per il calcolo della massa, ed essi sono, dal più grossolano al più preciso:

- 1) Stima della densità media di un corpo; con questo dato e il suo raggio, siamo in grado di ricavarci la massa, come:  $M = V\rho$  dove  $V = \text{volume} = \frac{4}{3}\pi r^3$  nel caso di corpi sferici, e  $\rho =$  densità media del pianeta; questo è in assoluto il dato più sensibile ad errori; infatti la densità media di un pianeta dipende sia dalla composizione chimica media (effetto di differenziazione), sia dall'effetto di compressione gravitazionale della materia contenuta nel suo interno, che dipende dalla sua massa. Questo metodo è molto approssimato, ma alcune volte è l'unico in grado di darci qualche risposta
- 2) Terza legge di Keplero: attraverso questa legge, possiamo determinare con ottima precisione sia la massa del nostro Sole, che la massa di qualunque corpo celeste che possiede un satellite molto meno massiccio. Questa tecnica consente anche di determinare la massa della Luna, anche se è richiesta la conoscenza della massa del nostro pianeta
- 3) Accelerazione di gravità: misurando l'accelerazione media di gravità del corpo celeste, siamo facilmente in grado di calcolare accuratamente la sua massa; nonostante questo sia il metodo più preciso, è anche il più difficile da attuare, poiché bisogna conoscere l'accelerazione di gravità. Se questo è facile da realizzare sulla Terra, non lo è altrettanto per tutti gli altri corpi celesti a noi lontani; l'unico modo è di inviare una sonda verso il corpo da esplorare ed analizzare con quale accelerazione essa ne viene attratta. E' chiaro però che, per non sprecare una costosissima sonda solo per un'accurata misura della massa del pianeta la massa dell'oggetto sia già nota, o almeno stimata; questo metodo quindi può essere efficacemente utilizzato solamente per migliorare (a volte di molto) precedenti misure.

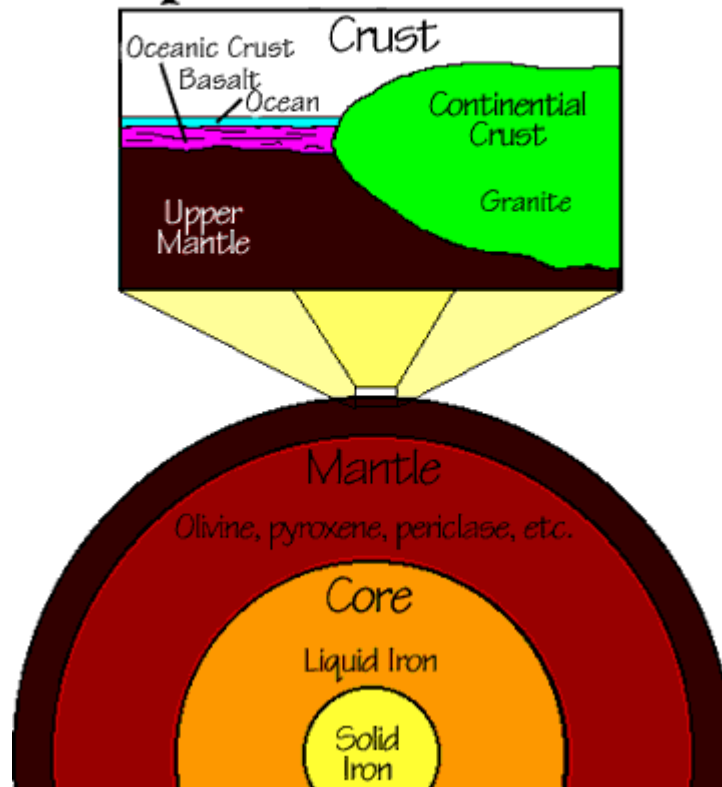
#### 1) Densità media di un corpo.

Questa è la tecnica che si utilizza per fare una prima stima rozza e veloce, o in assenza di altre informazioni. Infatti le uniche informazioni necessarie sono il raggio (medio) del corpo celeste e la sua densità (media); se il raggio si misura facilmente, altrettanto non si può dire per la densità.

Il valore medio, deve tenere conto di:

- composizione chimica superficiale, e quindi densità superficiale
- livello di differenziazione gravitazionale. La differenziazione gravitazionale è infatti quel processo che a causa dell'autogravità del corpo celeste porta gli elementi più densi a sistemarsi verso il centro, mentre quelli meno densi tendono a sistemarsi in prossimità della zona superficiale. Il fenomeno è analogo al galleggiamento di uno strato d'olio in un bicchiere d'acqua; se consideriamo che i pianeti, nelle loro fasi di formazione, erano corpi completamente fusi, allora non facciamo fatica a capire come gli elementi più densi come il ferro e il nichel siano sprofondati verso il nucleo, mentre elementi più leggeri come silicati e composti del carbonio, siano rimasti in superficie. Con le formule appena viste, siamo in grado di spiegare il perché: abbiamo visto infatti che un corpo immerso in un campo gravitazionale sente una forza proporzionale alla sua massa:  $F_p = m_1 g$  (la forza peso), e quindi è chiaro che un volume unitario di ferro avrà una massa maggiore di un pari volume di carbone, e quindi sentirà una forza maggiore (pur accelerando sempre con la stessa accelerazione  $g$ !); in questo scenario gli elementi più pesanti si dispongono nel nucleo, mentre quelli leggeri compongono la crosta; il pianeta è quindi composto di strati che hanno diversa composizione chimica e diversa densità. Questo significa che per stimare la densità media, non possiamo assolutamente limitarci a studiare la composizione chimica degli elementi in superficie, che non rappresentano un campione significativo. Un esempio? L'abbondanza di ferro nella crosta terrestre è di circa il 5%, mentre nel nucleo si pensa che esso costituisca circa l'80%; non possiamo quindi prendere il 5% del ferro in superficie come rappresentante dell'intera abbondanza di questo metallo nell'intero pianeta.

# Earth: Compositional Structure



Da cosa dipende il livello di differenziazione gravitazionale? Sostanzialmente dalla massa e quindi dalla gravità del pianeta e dal suo tasso di raffreddamento dopo la formazione ( e dalla sua storia evolutiva: ad esempio scontri con asteroidi). Un piccolo pianeta come plutone, ad una distanza così grande dal Sole, non ha avuto abbastanza tempo, ne abbastanza gravità da poter aver sviluppato una struttura a strati complessa e netta come quella terrestre; per questo, nella stima della massa si può anche trascurare questo fatto. Quest'affermazione è ancora più vera per la totalità degli asteroidi della fascia principale e per molti piccoli KBO; gli asteroidi infatti, sono nella quasi totalità, oggetti piccoli, e di forma irregolare; è naturale pensare che se un tale corpo celeste non ha avuto modo di assumere una forma sferica, non può neanche avere avuto un efficiente processo di differenziazione (i due processi hanno dei punti in comune); questo è provato anche dalla composizione chimica superficiale, mostra nella grande maggioranza dei casi, una presenza di ferro molto maggiore di quella presente nella crosta terrestre. Se assumiamo che tutti i corpi del sistema solare si siano formati da una stessa nube protosolare, allora è lecito pensare che le abbondanze di metalli, soprattutto tra i pianeti rocciosi, siano all'incirca le stesse e che la diversa composizione sia da ricercare altrove, come ad esempio nel differente processo di differenziazione.

- La pressione interna: la densità del ferro, in normali condizioni è di  $7800 \text{ Kg} / \text{m}^3$ , mentre quella del nucleo interno terrestre, composto quasi esclusivamente da ferro è di ben  $13000 \text{ Kg} / \text{m}^3$ ; questo è dovuto all'enorme pressione che il nucleo subisce a causa della presenza degli strati sovrastanti; la pressione interna deve quindi essere considerata, almeno per i pianeti più grandi.

Come si può vedere, non è facile, dalle semplici osservazioni, calcolare la densità media di un corpo celeste. Possiamo distinguere 3 grandi famiglie di corpi celesti, che presentano difficoltà e semplificazioni diverse:

- 1) asteroidi e (piccoli) KBO, cioè corpi celesti in cui possiamo trascurare gli ultimi due punti visti sopra; questo è particolarmente vero mano a mano che si parla di oggetti piccoli e come metodo di confronto possiamo utilizzare la forma sferica o no del corpo.
- 2) Pianeti rocciosi: per essi, possiamo considerare come paragone la Terra, e ricavare la densità media, utilizzando come modello il nostro pianeta, naturalmente correggendo per le diverse dimensioni e composizioni chimiche.
- 3) Pianeti gassosi: in questo caso il modello terrestre non ci aiuta perché la composizione chimica è totalmente differente e le densità medie sono molto diverse da quelle terrestri. Per stimare correttamente la densità allora si dovrebbe stimare la composizione chimica media e poi costruire un modello fisico-matematico del comportamento che segue una sfera di tale diametro sottoposta alla sua stessa autogravità. Questo problema apparentemente complicato, in realtà non presenta problemi di svolgimento; piuttosto resta l'incognita della composizione chimica media.

E' chiaro adesso perché questo metodo è conveniente applicarlo solamente quando non si hanno altre strade da percorrere; fortunatamente, nella maggioranza dei casi questo si verifica con i corpi minori del sistema solare, che possiedono una struttura ben più semplice.

- 2) Terza legge di Keplero: la legge derivata sperimentalmente da Keplero, può esserci davvero molto utile nel calcolo delle masse; essa, nella sua forma esatta, derivata dal problema dei due corpi, contiene in se la teoria della gravitazione sviluppata da Newton, ma la rende di più facile applicazione nel calcolo della massa. (è chiaro che la legge di Keplero e la gravitazione di Newton in realtà descrivono la stessa cosa, cioè la gravità, che è l'unica forza che regola la dinamica del sistema solare (almeno a grandi linee) anche se sotto punti di vista diversi). La terza legge di Keplero, nella sua forma esatta afferma che, per un sistema

di due corpi, il periodo di rivoluzione è dato da:  $P = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(M + M_s)}}$ ; chiaramente essa è

valida sia se applicata tra un pianeta e il Sole o tra un pianeta ed un suo satellite; l'unica condizione richiesta è che i due corpi orbitino intorno al comune centro di massa. In realtà essa si riferisce ad un sistema costituito da soli due corpi, cosa che non succede nel caso del sistema solare. Infatti, per una trattazione esatta, dovremo considerare tutti i corpi e le mutue interazioni gravitazionali. Siccome questo problema a n corpi non lo sappiamo risolvere in maniera esatta, un sistema di n corpi viene considerato come tanti sistemi a due corpi al quale poi si cerca di aggiungere le perturbazioni gravitazionali esercitate dalla presenza degli altri. Tuttavia c'è da dire che nella grande maggioranza dei casi, una trattazione così approfondita non è richiesta e le relazioni del problema dei due corpi sono valide e lo restano su un tempo di scala abbastanza lungo. Avrete comunque modo di verificare questa approssimazione (e in parte l'avete già avuto): i risultati che si ottengono sono sorprendentemente vicini alla realtà o comunque influenzati da errori di diversi ordini di grandezza maggiori. Siccome sappiamo come calcolare la massa della Terra con l'uso dell'accelerazione di gravità, possiamo usare la legge di Keplero per calcolare la massa dei corpi celesti gravitazionalmente legati con il nostro pianeta: la Luna e il Sole; per la nostra

stella abbiamo quindi:  $M_s = \frac{4\pi^2 a_E^3}{P_E^2 G} - M_E$ , dove  $a_E$  è il semiasse maggiore dell'orbita

terrestre (l'unità astronomica), e  $P_E$  è il periodo di rivoluzione (che vale  $3.155815 \cdot 10^7$  s); per la Luna, bisogna chiaramente utilizzare il semiasse lunare e il suo periodo di

rivoluzione:  $M_M = \frac{4\pi^2 a_M^3}{P_M^2 G} - M_E$ . E' facile notare che, nel caso del calcolo della massa del

Sole, possiamo anche trascurare la massa del nostro pianeta, siccome è circa 1 milione di volte minore, e quindi influirà sul risultato finale solo a partire dalla sesta cifra. Il discordo invece non può essere fatto per la relazione che ci dà la massa della luna, in quanto i due corpi, pur non essendo uguali, sono però confrontabili. Abbiamo quindi trovato il modo di calcolare la massa della Terra, della Luna e del Sole, con la legge di Keplero; siccome tutti gli altri corpi celesti sono legati al Sole, non è difficile immaginare che applicando la legge di Keplero al generico sistema Pianeta-Sole, posso ricavare la massa di ogni corpo del sistema Solare. Questo è vero solamente in linea teorica; in realtà, anche se fisicamente vero, il calcolo porta a risultati privi di senso: perché? La risposta è semplice; tutti i pianeti del sistema Solare hanno masse che sono da 1000 (Giove) a miliardi di volte minori di quella del Sole; per avere un calcolo privo di errori (visto che esso si propaga) dovremo conoscere con una precisione impensabile tutti i dati richiesti, come semiasse maggiore e periodo di rivoluzione, nonché avere una potenza di calcolo abbastanza elevata da poter trascurare gli errori di arrotondamento. Visto che stiamo parlando di numeri con circa 40 cifre (!) la cosa comincia a diventare abbastanza complicata! Inoltre, la formula stessa agevola la propagazione degli errori; senza entrare nel merito, vediamo che il semiasse maggiore compare al cubo e il periodo al quadrato; un piccolissimo errore nell'inserimento del semiasse maggiore, comporta un errore totale di 3 ordini di grandezza (cioè mille volte!); per il periodo l'errore è solo di 2 ordini di grandezza, per non parlare del valore della massa da sottrarre che ha appena 33 cifre! E' facilmente intuibile che non possiamo chiedere una precisione così elevata, e quindi appare un'utopia cercare di calcolare le masse planetarie con la Massa del Sole. Il calcolo può dare un risultato credibile (almeno come ordine di grandezza) per pianeti massicci come Giove e Saturno, mentre, per esempio, se applicato a Marte, anche con dati molto precisi, esso dà risultati privi di senso (una massa negativa!). Provate infatti ad applicare la terza legge di Keplero al sistema Marte-Sole, con i seguenti

dati:  $M_M = \frac{4\pi^2 a_M^3}{P_M^2 G} - M_S$  e  $P_M = 1.8809 P_E$  ; il risultato che si ottiene (  
 $a_M = 1.5237 a_E$   
 $M_S = 1.989 \cdot 10^{33} g$

$M_M = -9.527 \cdot 10^{28} g$ ) è molto strano, decisamente privo di significato!

Per calcolare quindi le masse dei pianeti, dobbiamo trovare un'altra idea; chiarito il fatto che i metodi per il calcolo sono i tre già descritti all'inizio, appare chiaro che non abbiamo molte scelte; tuttavia, abbiamo detto che la legge di Keplero si può applicare a qualunque sistema (che si può considerare di due corpi) gravitazionalmente legato; tutti i pianeti, ad esclusione di Mercurio e Venere, hanno da uno (la Terra) a dozzine di satelliti che gli ruotano attorno; questa è la nostra chiave; alcuni satelliti sono piccoli e densi come l'acqua, e quindi con una massa veramente esigua se confrontata con quella dei loro pianeti. I satelliti di Marte sono due asteroidi di pochi Km di diametro, mentre, sebbene Giove ospiti i satelliti più grandi del sistema solare, la loro massa è ben poca cosa se confrontata con un gigante del genere; stessa cosa vale per tutti gli altri pianeti, ad esclusione, ancora una volta, di Plutone e Caronte. Per quest'ultimi, la configurazione che si presenta è simile al caso Luna-Terra, anzi, molto più accentuato; le masse dei due corpi celesti sono confrontabili e quindi la legge di Keplero ci fornisce la massa totale del sistema, non le singole masse; per separare i due contributi si devono trovare altre vie, che come vedremo, non sono molto difficili, almeno per il sistema Plutone Caronte, ammettendo di conoscere raggio, distanza e assumendo una composizione chimica uguale (gli indizi ci sono tutti, come procedereste voi?).

Combinando quindi la legge di Keplero per il sistema Pianeta-Sole con quella Pianeta-Satellite, assumendo trascurabili le perturbazioni sui due moti orbitali (satellite e satellite+pianeta-Sole), e scegliendo un satellite con una massa molto inferiore al pianeta, siamo in grado di arrivare ad una relazione molto importante: Per il pianeta e il Sole, si ha

$$P_P = \frac{2\pi a_P^{3/2}}{\sqrt{G(M_P + M_{Sun})}}; \text{ mentre per il pianeta e il suo satellite: } P_S = \frac{2\pi a_S^{3/2}}{\sqrt{G(M_S + M_P)}};$$

dividendo le due relazioni membro a membro e manipolando un po', si ha:

$$\frac{P_S^2}{P_P^2} = \frac{a_S^3}{a_P^3} \frac{m_P + m_{Sun}}{m_S + m_P} = \frac{a_S^3}{a_P^3} \frac{m_{Sun} \left(1 + \frac{m_P}{m_{Sun}}\right)}{m_P \left(1 + \frac{m_S}{m_P}\right)}; \text{ i rapporti tra parentesi, possono essere scritti,}$$

con buona approssimazione:  $1 + \frac{m_P}{m_{Sun}} \approx 1$ ,  $1 + \frac{m_S}{m_P} \approx 1$  e quindi la relazione che otteniamo

sarà:  $\frac{m_P}{m_{Sun}} = \frac{a_S^3}{a_P^3} \frac{P_P^2}{P_S^2}$ ; considerando anche la legge di Keplero per il sistema Pianeta-Sole:

$m_{Sun} + m_P = \frac{4\pi a_P^3}{GP_P^2}$  abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite ( $m_P$  e  $m_{Sun}$ )

facilmente risolvibile: 
$$\begin{cases} \frac{m_P}{m_{Sun}} = \frac{a_S^3}{a_P^3} \frac{P_P^2}{P_S^2} \\ m_{Sun} + m_P = \frac{4\pi a_P^3}{GP_P^2} \end{cases}; \text{ in effetti, non abbiamo bisogno neanche di}$$

conoscere la massa Solare, perché il sistema permette di ricavare entrambe le masse.

E' chiaro che se conosciamo a priori la massa solare, i calcoli si semplificano:

$m_P = \frac{a_S^3}{a_P^3} \frac{P_P^2}{P_S^2} m_{Sun}$ . I risultati che si ottengono sono molto attendibili, e la loro accuratezza

dipende sostanzialmente dai dati inseriti e dall'usare masse planetarie molto minori di quella solare e masse dei satelliti molto minori di quelle dei pianeti (almeno 1000 volte).

La formula non può essere applicata al sistema Terra-Luna e Plutone-Charonte, in quanto non vengono soddisfatte le condizioni delle masse. La precisione raggiunta è grande per pianeti tipo Marte, Urano e Nettuno e tutti i corpi celesti che hanno piccoli satelliti (molti asteroidi e KBO), mentre per Giove e Saturno, le cui masse non sono così piccole se comparate al Sole, il risultato può essere migliorato, in particolare per Giove.

Per il pianeta gigante, una precisione maggiore può essere raggiunta confrontando il valore ottenuto da queste relazioni con quello ottenuto dall'applicazione della terza legge di Keplero vista in precedenza, che porta a risultati sensati nel caso del pianeta gassoso.

C'è da dire che questa è piuttosto una pignoleria che una vera utilità; i risultati ottenuti sono influenzati da altri errori e approssimazioni (quali l'assumere il pianeta a densità costante e sferico) e la differenza è comunque ampiamente trascurabile.

Con questo sistema, si può calcolare in un altro modo la massa terrestre; invece di considerare la nostra Luna, possiamo considerare le altre migliaia di satelliti artificiali che vi orbitano intorno. Siccome bisogna conoscere alcuni elementi orbitali come il semiasse maggiore e il periodo di rivoluzione (esatti), la cosa non è così semplice. Possiamo semplificare notevolmente le cose considerando i satelliti geostazionari, cioè che hanno lo stesso periodo orbitale della rotazione terrestre e orbita circolare ed equatoriale; per essi è

facile calcolare anche il semiasse maggiore della sua orbita (che coincide con il raggio) e il periodo di rivoluzione uguale alla rotazione terrestre: 23 ore 56 minuti e 4 secondi. E' chiaro che questo calcolo è un esercizio per capire come si calcola la massa di un pianeta conoscendo dati orbitali di un satellite orbitante; infatti i satelliti geostazionari, come tutti gli altri satelliti artificiali, necessitano, per essere messi in orbita, di una conoscenza precisa della massa terrestre!

Supponiamo di conoscere anche la massa solare; la distanza dell'orbita dalla superficie terrestre è di 35730 Km; per trovare il semiasse maggiore, che è anche il raggio orbitale, questo valore va chiaramente riferito al comune centro di massa del sistema terra-satellite, che può essere identificato con il centro del nostro pianeta (la massa del satellite la si trascura, essa è di qualche centinaio di Kg!), e quindi

$$a_s = d_s + r_E = 42108 \text{ Km} = 42.108 \cdot 10^8 \text{ cm}, \text{ mentre } P_s = 86400 \text{ s}, a_E = 1.4960 \cdot 10^{13} \text{ cm},$$

$$P_E = 3.1558 \cdot 10^7 \text{ s}, m_{sun} = 1.989 \cdot 10^{33} \text{ g}; \text{ quindi: } m_p = \frac{a_s^3}{a_p^3} \frac{P_p^2}{P_s^2} m_{Sun} = 5.9722 \cdot 10^{27} \text{ g}, \text{ un}$$

valore estremamente vicino a quello attualmente accettato ( $5.974 \cdot 10^{27} \text{ g}$ ).

- 3) Accelerazione di gravità: Con questo metodo siamo in grado di misurare accuratamente la

massa terrestre, dalla semplice relazione già vista:  $g = \frac{GM_E}{r_E^2}$  e quindi:  $M_E = \frac{gr_E^2}{G}$ ;

introducendo i dati, come raggio terrestre, e accelerazione di gravità, ( $r_E = 6378 \text{ Km}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ) troviamo  $M_E = 5.976 \cdot 10^{27} \text{ g}$ ; in realtà questo è un dato approssimato, e anche un calcolo in apparenza così semplice, può essere complicato a piacere, nella ricerca della massima precisione. Infatti sappiamo che la Terra è leggermente schiacciata ai poli, e quindi raggio equatoriale e polare non coincidono: quale prendere dunque? Non solo, anche l'accelerazione di gravità sarà diversa, a causa dello schiacciamento polare, ma soprattutto della forza centrifuga sempre presente su un corpo in rotazione, utilizzando un sistema di riferimento non inerziale. La forza centrifuga è una forza apparente che si manifesta soltanto se si considerano sistemi di riferimento ruotanti, come appunto il caso di ogni pianeta. Il suo verso è contrario a quello della gravità e quindi il risultato è un'accelerazione di gravità risultante minore di quella reale. L'effetto è massimo all'equatore, in cui la velocità di rotazione raggiunge il massimo, e nullo ai poli dove essa è nulla. Il risultato è che l'accelerazione misurata all'equatore è di  $9.78 \text{ m/s}^2$ , mentre ai poli di  $9.82 \text{ m/s}^2$  (ma solo una piccolissima percentuale è dovuta effettivamente alla forza centrifuga). La domanda quindi sorge spontanea: quale valori prendere? Un buon compromesso è prendere dei valori medi, sia per il raggio che per l'accelerazione di gravità; un calcolo più complesso che tenga conto dello schiacciamento polare, e della diversa distribuzione delle masse (che provoca le cosiddette anomalie gravitazionali) richiede un modello molto preciso della struttura e composizione terrestre, con il risultato che si ottengono dati molto molto simili a quelli già trovati; insomma, in questo caso il gioco non vale la candela!

Data la sua semplicità e precisione, il metodo può venire applicato anche ad altri corpi celesti ma solo a condizione di migliorare le misurazioni precedenti; la situazione è abbastanza semplice; basta calcolare l'accelerazione subita da una sonda in rotta verso il pianeta considerato, la sua distanza dal centro del pianeta stesso e quindi calcolare la massa dalle formule appena viste, come già accennato in precedenza. Il metodo è semplice ma richiede l'invio di una sonda verso il pianeta, e quindi difficile da mettere in pratica; tuttavia, per pianeti che non possiedono satelliti, questo è l'unico metodo per conoscere con sufficiente precisione la loro massa; è proprio in questo modo che si misurò la massa di Venere e Mercurio, quando negli anni 70 le sonde Mariner passarono nelle loro vicinanze;

sembra strano, ma fino a quel momento si conosceva solo una stima alquanto approssimata, data da congetture sulla loro composizione superficiale e struttura interna.