La misura della circonferenza terrestre

di **Daniele Gasparri**

La Terra è un corpo di forma sferoidale; in realtà non è una sfera perfetta, ma leggermente schiacciata ai poli, tuttavia per le nostre applicazioni quotidiane, possiamo assumerla come di forma perfettamente sferica. Vi siete chiesti mai come si può notare che essa sia veramente sferica? Questa è una di quelle domande a cui molte persone non sanno rispondere, per il semplice fatto che nessuno ne dubita e per questo non si è mai chiesto come effettivamente si riesce a capirlo.

Di modi naturalmente ce ne sono tanti; lo stesso Colombo, nel 1492 anche se sbagliando, lo dimostrò, credendo di aver raggiunto le Indie passando dall'altra parte della Terra, che a quel tempo si credeva piatta.

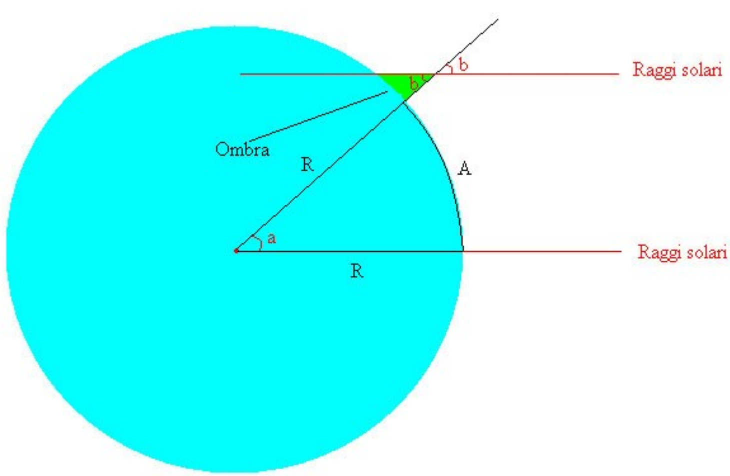
Eppure, non è difficile dimostrare che essa è effettivamente una sfera; certo, si può fare un'esperienza moderna sulla falsa riga di Colombo, e cioè prendere un aereo e fare l'intero giro del mondo, ma basta qualcosa di più semplice. Già l'idea che esistono dei fusi orari e che da qualche parte è notte mentre da noi è giorno, può essere una buona spiegazione del fatto che la terra non è piatta; effettivamente per provare che essa è in realtà di forma sferica, basta osservare il Sole, o meglio la sua altezza sull'orizzonte, proprio come molti anni fa fece Eratostene.

Non starò qui a raccontarvi tutta la storia, ma egli notò come, nello stesso giorno, il Sole raggiungeva delle altezze diverse sull'orizzonte, tra due località abbastanza distanti tra di loro; su una superficie piatta, questo chiaramente non succede, in quanto il Sole illuminerebbe tutto allo stesso modo e alla stessa altezza (a meno di un piccolo angolo di parallasse); mentre questo non accade se la superficie su cui siamo è una sfera. E' altresì vero che la Terra o è piatta o è sferica; è assurdo pensare ad una strana forma poligonale, visto che dalle nostre esperienze di viaggio e da quelle passate, nessuno si è imbattuto in un molto poco probabile spigolo.

Quindi, basterebbe chiamare un vostro amico distante da voi almeno 400-500 Km, che misurasse allo stesso vostro istante l'altezza del Sole sull'orizzonte o la sua posizione in cielo; se essa è diversa, allora la Terra non può essere piatta! Questo naturalmente può essere fatto anche con la Luna e tutte le stelle; una Terra piatta mostrerebbe lo stesso cielo in qualunque punto ci si trovasse, cosa che invece non accade!

Tuttavia, potete fare un esperimento ancora più semplice, magari nelle afose giornate estive, mentre siete immersi nella fresca e calma acqua del mare; se infatti vi capita di osservare una lontana barca passare, o qualunque dettaglio si trovi ad una distanza superiore a qualche chilometro in mare, noterete senza ombra di dubbio la curvatura della Terra. L'effetto è evidente osservando una grossa nave, mentre si è proprio sul pelo dell'acqua (naturalmente il mare deve essere calmo, altrimenti le onde falseranno il risultato!); se avete una buona vista vi accorgerete subito che non riuscirete a vedere tutta la nave, essa anzi vi sembrerà mezza affondata!Non preoccupatevi, non è così; è solo la curvatura della Terra che si fa sentire e vi fa apparire la barca più in basso di quanto apparirebbe se la superficie fosse perfettamente piatta.

Ci sono tanti metodi per capire che la superficie terrestre è curva; sta solo alla fantasia di ognuno di voi scoprirne altri di nuovi; basta per esempio osservare contemporaneamente il tramonto del Sole al livello del mare e da una collina (sempre con vista sul mare) adiacente; capirete subito che la Terra è curva dall'analisi dei differenti orari del tramonto che annoterete; oppure, ancora, osservare le nubi al tramonto (o anche una scia di aereo), non richiede la presenza di un amico che osservi lo stesso fenomeno come in precedenza; infatti, per qualche minuto (a volte anche mezz'ora e più) dopo il tramonto del Sole, le nuvole sopra di voi, che si trovano ad altezze variabili tra i 1000 (le più basse) e i 10-12000 metri (i cirri), continueranno ad essere ancora illuminate dal Sole; per loro, nonostante siano esattamente sopra di voi, è ancora giorno; come sarà mai possibile? E cosa dire del cielo, che continua a restare azzurro e non diventa subito scuro, non appena il Sole tramonta dal vostro sito di osservazione?
Questi sono tutti fenomeni che non sarebbero possibili in una Terra piatta; non solo: durante un'eclissi di Luna, cosa succede al nostro satellite naturale? Viene coperto dall'ombra terrestre, e di che forma vi appare tale ombra?E' chiaramente una circonferenza!
Insomma, non bisogna scomodare il Cristoforo Colombo che è in noi e fare il giro del mondo per provare che esso sia effettivamente di forma sferica; basta osservare ciò che capita ogni giorno, dalla nostra casa, ovunque essa si trovi.
Eratostene capì che la Terra era sferica, e passò subito a cercare risposta alla successiva domanda: quanto è sferica? Come misurare la circonferenza terrestre e quindi anche il suo raggio ?Un problema non da poco, ma che lui stesso risolse molto brillantemente!
E' facile notare che, per due città, poste per comodità sullo stesso meridiano, ma a latitudini differenti, a causa della curvatura della Terra il Sole raggiunge diverse altezze massime sull'orizzonte. Nella figura in basso sono raffigurati due luoghi: uno posto in prossimità dell'equatore, vede il Sole esattamente a 90°, mentre nell'altro punto l'altezza massima del Sole non arriva a 90°, e può essere misurata facilmente dall'ombra proiettata da un bastone conficcato nel terreno, perpendicolarmente ad esso.



Se la Terra è sferica, allora l'inclinazione dei raggi solari tra due località diverse non è la stessa ma cambia a seconda della latitudine del luogo. Capendo questo importantissimo fatto, Eratostene riuscì a stimare con ottima precisione la circonferenza e il diametro della Terra, oltre 2000 anni fa!

Nel punto d'osservazione più in alto, il Sole proietta un'ombra che si discosta di un angolo b dalla verticale perfetta; questo angolo b si calcola facilmente, sia con la trigonometria, che con semplici considerazioni sugli angoli dei triangoli; (per esempio, nel triangolo verde, un angolo è sicuramente di 90°, l'altro è l'altezza del Sole sull'orizzonte, e quindi b=90-altezza del Sole; oppure, siccome è più facile misurare lunghezze di segmenti che ampiezze di angoli; si ha: $b = \arctan\frac{H}{B}$, dove H= altezza della bacchetta, e B= lunghezza dell'ombra proiettata sul terreno).
La differenza tra l'angolo rispetto alla verticale misurato nella posizione 1 e quello misurato nella posizione 2, ci da direttamente l'angolo a, che naturalmente contiene informazioni sulla circonferenza terrestre; nel nostro caso, per semplicità, abbiamo considerato i raggi solari perpendicolari in un punto, in modo che il valore di b sia esattamente uguale all'angolo a, (senza fare alcuna differenza); ora conosciamo tutto; Eratostene a questo punto fece una proporzione; l'intera circonferenza sta ad un angolo di 360° come un arco A (che misuro) sta ad a; risolvendo si trova esattamente il valore della circonferenza terrestre, come multiplo della distanza tra le due località (A). Naturalmente, dalla relazione della circonferenza: $C = 2\pi R$ ricaviamo il raggio terrestre.
Noi possiamo usare un'altra relazione, e ricavare direttamente il raggio terrestre, come: $R = \frac{A}{a}$, dove A è la distanza tra le due località (un arco di circonferenza).
Eratostene ottenne una misura molto precisa; la maggiore difficoltà del tempo era nella misura esatte della distanza tra le due località, ma nonostante questo egli ottenne un valore di 40 000 Km, e quindi un raggio terrestre di 6365 Km, sorprendentemente vicino all'attuale raggio equatoriale di 6378 Km!
In realtà la Terra non è una sfera perfetta; essa è schiacciata ai poli, e quindi il raggio equatoriale e polare differiscono di qualche chilometro; il raggio equatoriale risulta essere di : 6378,135 Km, mentre quello polare è: 6356,750 Km. Queste misure così precise sono possibili grazie ai numerosi satelliti che per anni hanno studiato il nostro pianeta.

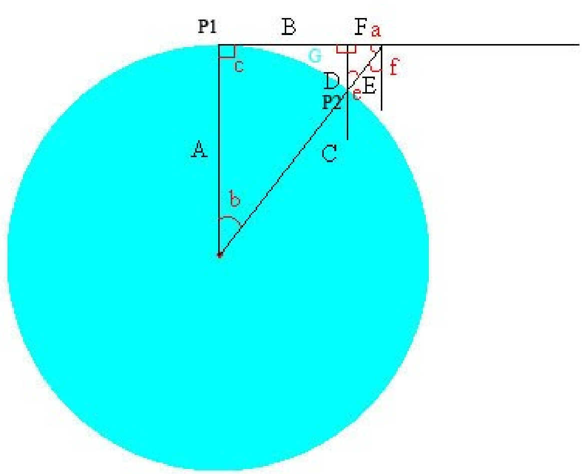
Tabella cronologica che riporta date, e precisioni raggiunte da diversi osservatori nella misura del raggio equatoriale. Notate un fatto curioso: in Europa si raggiunse un risultato degno di nota solamente a partire dal 1528, dopo la fine (convenzionale) del medioevo e dopo che Cristoforo Colombo dimostrò che la Terra era sferica, contro le credenze mistiche e religiose di quei tempi.

Geodesista	**Luogo**	**Anno**	**Raggio (metri) (equatoriale - polare)**	**Schiacciamento**
Eratostene	Egitto	230 a.C.	6 108 748	
Posidonio	Egitto e Rodi	100 a.C.	7 064 055	
Abelseda	Arabia	827	6 122 910	
Albazen	Arabia	1100	6 074 308	
Fernal	Francia	1528	6 448 480	
Snell	Olanda	1617	6 099 092	
Norwood	Inghilterra	1635	6 412 592	
Ricolli e Firmaldi	Lombardia	1658	6 865 301	
Picard	Francia	1669-1672	6 369 140	
Cassini	Francia	1681-1718	6 411 948	
Everest		1830	6 377 276 - 6 356 07 5	1/300,8
Bessel		1841	6 377 397 - 6 356	1/299,15

			079	
Clarke		1866	6 378 206 - 6 356 584	1/294,98
Clarke		1880	6 378 301 - 6 356 584	1/293,47
Hayford		1909	6 378 388 - 6 356 912	1/297
Fischer		1960	6 378 160 - 6 356 778	1/298,3

La domanda che potrebbe sorgere spontanea è: come si misura lo schiacciamento polare?
O ancora: come si è capito che la Terra non è perfettamente sferica?
Ipotesi sulla reale forma della Terra furono fatte da Newton che usando la legge di gravitazione universale riuscì a capire che essa in realtà non fosse proprio una sfera perfetta. Ma perché non avrebbe dovuto esserlo?Sostanzialmente per colpa della forza centrifuga, quella forza apparente che è presente in tutti i sistemi di riferimento non inerziali, nel nostro caso rotanti. La Terra, ruotando su se stessa ad una velocità abbastanza sostenuta (si calcola subito: essa percorre 360° in circa 24 ore, cioè circa 40 000 Km in 24 ore (all'equatore) e quindi 1670 Km ogni ora!) avrebbe dovuto sentire una forza centrifuga rilevante (essa è proporzionale alla velocità di rotazione), massima all'equatore e zero ai poli. In un fluido, questo comportamento fa si che esso tenda a schiacciarsi e a distribuirsi in un disco attorno all'equatore; la Terra non è chiaramente un fluido come l'acqua, tuttavia questo effetto si fa sentire lo stesso e si manifesta come un piccolo schiacciamento polare, che può essere calcolato a patto di sapere la composizione precisa e il comportamento della Terra. La misura di questo schiacciamento sarebbe stata possibile dall'analisi dell'accelerazione di gravità in prossimità dei poli e dell'equatore di un corpo in rotazione su se stesso. Successive misurazioni del diametro polare ed equatoriale della Terra diedero ragione all'intuizione di Newton: la Terra era in effetti leggermente schiacciata.
Le misurazioni furono fatte con lo stesso metodo di Eratorsene, cambiando i punti di misurazione; in particolare nei pressi dell'equatore e nei pressi del polo nord terrestre.
Oggi, grazie alle sonde che hanno studiato (e ancora studiano) il nostro pianeta, siamo in grado di descrivere molto bene la sua forma; l'attuale valore dello schiacciamento polare è di 1/298.25, non troppo lontano da 1/230 calcolato da Newton.

E’ chiaro che oltre alle misurazioni dirette del raggio terrestre, una stima della sua forma può essere fatta anche attraverso misurazioni dell’accelerazione di gravità. Essa infatti dipende dall’inverso del quadrato della distanza dal centro della Terra, e quindi in linea di principio essa sarà maggiore ai poli che all’equatore, proprio perché il raggio polare è minore. Per stimare questo però, dobbiamo necessariamente calcolare l’accelerazione centrifuga per ogni punto della superficie e poi sottrarre il suo contributo dalla misura dell’accelerazione di gravità. Infatti, l’accelerazione centrifuga si oppone all’accelerazione di gravità, con il risultato che all’equatore essa è minore che ai poli anche senza lo schiacciamento della Terra.
Non a caso questo è il motivo per il quale tutte le sonde spaziali vengono lanciate da luoghi il più possibile vicini all’equatore; in questo modo si sfrutta sia la minore accelerazione di gravità, sia la componente tangenziale della velocità della Terra, entrambi molto utili per risparmiare prezioso carburante rispettivamente nelle fasi della partenza e della messa in orbita terrestre.
Prima di chiudere questo argomento vorrei passare ad analizzare un fatto molto più semplice ma curioso; proprio all’inizio, ho scritto che sarebbe necessario osservare dal pelo dell’acqua una lontana nave o un isola, per vedere la curvatura terrestre; questo è chiaramente vero, ma non abbiamo ancora calcolato quanto è questa curvatura: cioè, detto in termini più rozzi: di quanto vedo più bassa una nave posta ad una certa distanza da me? di quanti metri per ogni unità di lunghezza, vedo “abbassarsi” l’orizzonte a causa della curvatura?
La risposta è piuttosto semplice, basta analizzare lo schema geometrico, che è il seguente:



Schema geometrico per capire e stimare la curvatura della superficie terrestre.

Supponiamo di osservare dal polo nord (punto P1) in questa figura un dettaglio lontano sulla superficie terrestre (P2); quanto si fa sentire in questo caso la curvatura terrestre? Supponiamo che in P2 ci sia una alta torre: di quanto la vedrò più bassa rispetto alla sua vera altezza?

La nostra linea di orizzonte è data dalla tangente al punto di osservazione P1, mentre la nostra torre, alta E, ci apparirà più bassa perché inclinata rispetto a noi (e allora già la vediamo alta solamente D) e perché al di sotto della nostra linea di orizzonte, proprio del valore D.
Conoscendo la separazione in Km sulla superficie terrestre tra i punti P1 e P2 e il raggio della Terra, siamo in grado di trovare facilmente l'altezza D. Intanto possiamo notare come il triangolo A, CE, BF, sia simile al triangolo DEF, in quanto entrambi retti, con l'angolo b uguale ad e , ed f in comune. Siccome conosciamo b, c, e quindi e, f , quindi anche a (a=90-f) e il lato A, possiamo risolvere i triangoli rettangoli e trovare facilmente il valore di D.
Per comodità consideriamo la distanza tra P1 e P2 di 100 km, e quindi l'angolo b sarà dato da: $b = \frac{G}{A}$ (dove G è l'arco di circonferenza = 100 Km). Quindi, possiamo scrivere:

$$BF = A \tan b$$

$$CE = \sqrt{A^2 + BF^2}$$

$$E = CE - C$$

$$D = E \cos e = E \cos b$$

E alla fine otteniamo, per G = 100 Km, D= 0.7839 Km, cioè circa 784 metri! Questo valore non è troppo piccolo, e spiega si come sia impossibile, anche in una giornata limpida, non riuscire a vedere le coste di una lontana isola.
Per distanze minori troviamo, ad esempio, che per soli 8 Km, lo spostamento verticale dovuto alla curvatura è già di circa 50 metri, quindi facilmente apprezzabile.

Curvatura della Terra; il dislivello, se ci si trova al livello del mare, è di circa 50 metri in altezza ogni 8 Km in orizzontale.