

La magnitudine limite nelle osservazioni telescopiche

Di Daniele Gasparri

Quante stelle posso osservare con il mio telescopio? Questa è una domanda classica dell'astrofilo alle prese con le prime osservazioni, ma è anche una questione molto delicata e complessa, che spesso non si conosce fino in fondo.

In questo articolo analizziamo una famosa formula per il calcolo della magnitudine limite e ne discutiamo i risultati, giungendo alla formulazione di un modello più complesso ed accurato. Scopriremo, se mai ce ne fosse bisogno, che l'importanza di un cielo scuro è fondamentale quanto il diametro del telescopio.

La formula classica

La magnitudine stellare raggiungibile all'oculare del proprio telescopio è un valore molto importante da conoscere, ma difficile da determinare con una relazione matematica.

La relazione più utilizzata è di questo tipo: $m_{\text{lim}} = N + 5 \log D$, dove D è il diametro del telescopio espresso in centimetri ed N è una costante che tiene conto delle molte variabili in gioco (che analizzeremo tra breve), tra cui trasparenza, qualità delle ottiche e del cielo.

Spesso nei manuali di astronomia il valore di N vale 6,8. In questo modo la relazione assume la forma: $m_{\text{lim}} = 6,8 + 5 \log D$.

Come possiamo notare, la magnitudine limite dipende, prima di tutto, dal diametro dello strumento: un telescopio di diametro maggiore raccoglie una maggiore quantità di luce, quindi ci permette di osservare stelle più deboli rispetto all'occhio nudo.

La formula rappresenta un'approssimazione e cerca di restituire il valore massimo della magnitudine raggiungibile da un luogo buio, osservando una stella nei pressi dello zenit, con un telescopio di diametro D .

L'origine di questa relazione è da far risalire al 1945, a seguito delle numerose osservazioni condotte con gli strumenti professionali più grandi e potenti dell'epoca, come il grande telescopio Hale da 5 metri di diametro e il rifrattore da 102 cm di Yerkes.

Nel corso di oltre 60 anni di astronomia, la qualità delle ottiche, sia professionali che amatoriali, ha subito notevoli miglioramenti, soprattutto dal punto di vista della trasmissione della luce.

Possiamo quindi chiederci: **questa formula è ancora valida?** Qualora non lo fosse, quale è la relazione più corretta attualmente?

Le osservazioni smentiscono la formula classica

Come per ogni teoria scientifica, il modo migliore per provarne la veridicità è metterla alla prova dei fatti. Confrontiamo i valori ottenuti dalla formula con le nostre osservazioni, da condurre al buio, con l'occhio adattato all'oscurità e in prossimità di stelle poste allo zenit.

Nel corso degli anni sono stati numerosi gli studi condotti sulla magnitudine limite raggiungibile, e in generale sulla risposta fisiologica dell'occhio umano alle basse illuminazioni.

Il lavoro forse più grande ed accurato è stato portato avanti nel 1990 dall'astronomo Schaefer, il quale si è avvalso della collaborazione di ben 314 osservatori amatoriali.

I risultati di questo sondaggio tra gli astrofili sono stati sorprendenti. I valori osservati sono di almeno una magnitudine superiore a quelli previsti dalla formula classica, tanto che lo stesso Schaefer ha dovuto sviluppare un nuovo modello che prevedesse tali risultati.

Anche durante la stesura di questo articolo è stato condotto un piccolo sondaggio tra gli osservatori visuali ed il risultato è stato confermato: **la magnitudine limite stellare raggiungibile con i moderni strumenti è nettamente superiore rispetto a quella prevista dalla formula classica.**

I valori medi in funzione del telescopio utilizzato sono riportati nella tabella 1, nella quale è stata riportata la magnitudine limite media osservata allo zenit sotto un cielo di magnitudine ad occhio nudo pari alla 6,2-6,5.

Per quale motivo la formula classica sembra non fornire più dati attendibili?

Per due motivi principali, ovvero la migliore trasparenza di lenti e riflettività degli specchi e l'ottima qualità ottica, in grado di restituire immagini limitate dalla sola diffrazione.

Appare evidente che siamo costretti a ricavarci una relazione più adatta ai nostri scopi, ma prima è necessario capire molto bene da cosa è influenzata la magnitudine limite. Successivamente, aiutandoci con le nostre osservazioni e con quelle di Schaefer, possiamo costruire un modello ed una nuova formula.

Da cosa dipende la magnitudine limite?

Sembrerebbe molto semplice stimare la luminosità minima di un oggetto puntiforme visibile attraverso un telescopio, ma in realtà questo è un problema estremamente complesso, che ha coinvolto e continua a coinvolgere astronomi, fisici, psicologi e fisiologi, senza arrivare a conclusioni definitive.

Noi non indagheremo a fondo le complesse tematiche che riguardano l'occhio umano e il suo comportamento, piuttosto ci concentreremo su alcune variabili, prettamente astronomiche, che influenzano la magnitudine limite telescopica.

La magnitudine limite stellare dipende **prima di tutto dal diametro del telescopio utilizzato**, perché maggiore è l'area di raccolta della luce, maggiore è il guadagno in magnitudini rispetto alle os-

servazioni ad occhio nudo, secondo la semplice relazione $G = 5 \log \left(\frac{D_{tel}}{D_{eye}} \right)$, dove D_{tel} è il diametro

del telescopio e D_{eye} quello della pupilla dell'occhio umano, tipicamente di 7 mm per persone sotto i 30 anni, 6 mm fino a 50 anni e 5 mm oltre i 50 anni. G rappresenta il guadagno in magnitudini rispetto all'occhio nudo ed è anche una prima stima (molto approssimata) della magnitudine raggiungibile con lo strumento, a partire da quella visibile ad occhio nudo nella stessa zona di cielo.

Il diametro del telescopio non è l'unica variabile da considerare, altrimenti avremmo già ottenuto la formula richiesta in modo piuttosto semplice.

A parità di diametro strumentale, la magnitudine limite è influenzata prevalentemente dal contrasto, dal seeing, dall'altezza della stella sull'orizzonte e da proprietà intrinseche all'occhio umano, tra le quali la massima dilatazione della pupilla e l'acutezza visiva, variabile da individuo ad individuo.

Il contrasto e la qualità del cielo. E' esperienza comune, e abbastanza semplice da verificare, che da un luogo con inquinamento luminoso si vedano meno stelle, sia al telescopio che ad occhio nudo. Il cielo notturno non è mai perfettamente scuro, ma brilla, nella migliore delle ipotesi, come una stella di magnitudine 22 dal diametro di 1 secondo d'arco. Nel caso di inquinamento luminoso, la brillantezza superficiale del cielo aumenta in modo vistoso, e non è raro giungere a valori pari a 18 magnitudini ogni secondo d'arco quadrato all'interno delle città.

Perché con un cielo brillante non riusciamo a vedere le stelle?

La risposta è meno banale di quanto possa sembrare.

La luminosità del cielo, infatti, si somma alla luminosità delle stelle e di tutte le sorgenti poste oltre l'atmosfera terrestre. Se così stanno le cose, ogni stella, vista sotto un cielo luminoso, dovrebbe apparire addirittura più luminosa di quanto non sia in realtà. Come mai, allora, all'aumentare della luminosità del cielo diminuisce la magnitudine limite? La risposta sta nel contrasto: è vero che la luminosità delle stelle di somma a quella del cielo, ma è altrettanto vero che il contrasto, ovvero la differenza tra la magnitudine della stella + il cielo e del cielo solamente, si assottiglia mano a mano che lo sfondo si illumina.

Un occhio umano medio, privo di difetti e adattato al buio, è in grado di percepire stelle anche di magnitudine 8 se poste su uno sfondo completamente nero. La situazione cambia mano a mano che aumenta la luminosità dello sfondo e il contrasto si riduce, tanto che nelle migliori serate è difficile percepire ad occhio nudo stelle di magnitudine superiore alla 6,5.

Da tutto questo emerge una considerazione importantissima: **Ogni stima della magnitudine limite deve considerare la qualità del cielo dalla quale si osserva.**

La qualità di un cielo si esprime attraverso la magnitudine limite visibile ad occhio nudo allo zenit, oppure attraverso la brillantezza superficiale, espressa in magnitudini ogni secondo d'arco quadrato. Per un approfondimento vedi il box.

L'ingrandimento. Il limite di ogni osservazione astronomica è determinato quindi dal contrasto della stella rispetto al fondo cielo, il quale non si presenta mai totalmente nero.

Data una certa qualità del cielo, la magnitudine limite raggiungibile dipende dall'ingrandimento utilizzato. La luminosità superficiale del cielo che l'osservatore percepisce può diminuire all'aumentare dell'ingrandimento e al variare della pupilla d'uscita, ovvero del diametro del fascio di luce che esce dall'oculare.

Aumentando l'ingrandimento, quindi, diminuisce la luminosità superficiale del cielo percepita dall'occhio, mentre la stella resta puntiforme e mantiene inalterata la luminosità.

Il massimo guadagno in magnitudini si ottiene quando ci si ferma poco oltre la soglia per la quale la stella comincia a mostrare un diametro apprezzabile, sia esso determinato dalla diffrazione della luce o dalla turbolenza atmosferica.

Questo ingrandimento ottimale è orientativamente uguale ad 1,5-2 volte il diametro del telescopio espresso in millimetri, nel caso in cui le ottiche sono collimate e la turbolenza minima.

Turbolenza. In presenza di forte turbolenza il diametro di ogni stella sarà maggiore della figura di diffrazione. Non sarà quindi possibile ingrandire l'immagine per diminuire la luminosità del cielo e avere il miglior contrasto possibile. La magnitudine limite raggiungibile sarà inesorabilmente minore e solo serate con seeing ottimo ci permetteranno di vedere stelle più deboli.

Le proprietà delle ottiche: qualità ottica, collimazione ma anche la configurazione ottica sono variabili da considerare nello sviluppo di un modello per la stima della magnitudine limite. Strumenti ostruiti e con numerosi elementi ottici, come i catadiottrici, raggiungono magnitudini leggermente inferiori rispetto a strumenti con minori elementi nello schema ottico, come i rifrattori.

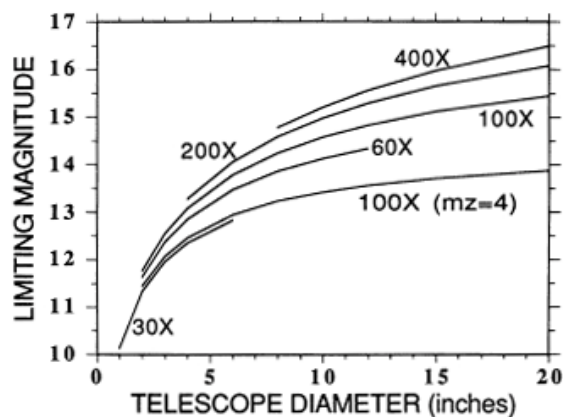
Il miglioramento dei trattamenti antiriflessi a partire dagli anni 90 ha fatto guadagnare agli strumenti astronomici, soprattutto amatoriali, circa 1 magnitudine ed è il principale motivo dell'inadeguatezza della formula classica per la determinazione della magnitudine limite.

Acutezza visiva ed esperienza. L'esperienza nell'osservazione del cielo è molto importante e consente di guadagnare anche una magnitudine rispetto agli osservatori alle prime armi.

L'occhio umano, inoltre, presenta caratteristiche variabili da individuo ad individuo che sono impossibili da quantificare in una relazione matematica. L'acutezza visiva, ovvero la sensibilità del nostro occhio agli stimoli luminosi, è ciò che impedisce lo sviluppo di un modello ed una relazione che valga per tutti gli individui.

Anche l'età dell'osservatore influisce sul risultato finale, poiché da essa dipende l'apertura massima della pupilla in condizioni di adattamento al buio. Non deve quindi stupire che, considerando altri fattori legati all'età (opacizzazione del cristallino, perdita di sensibilità...), un giovane osservatore sotto i 30 anni riesca, a parità di altre condizioni, ad osservare oggetti anche mezza magnitudine più deboli di un collega di 30 anni più vecchio.

Il colore delle stelle. L'occhio umano, in visione adattata al buio, ha un picco di sensibilità a 500 nm, comportandosi, di fatto, come un filtro fotometrico. La magnitudine limite raggiungibile, quindi, è quella che compete alla curva di sensibilità dell'occhio umano, detta anche magnitudine visuale. Quando cerchiamo di individuare la stella più debole visibile al telescopio dobbiamo sempre



la magnitudine limite dipende anche dall'ingrandimento dell'immagine, fino a valori di circa 2 volte il diametro dell'obiettivo espresso in millimetri. L'ingrandimento riduce la luminosità superficiale percepita del cielo e aumenta il contrasto delle stelle rispetto allo sfondo. Contrariamente al pensiero comune, la magnitudine limite è modellata dal contrasto e non dalla luminosità della sorgente.

controllare sulle mappe in nostro possesso questo valore. Ad essere precisi, la magnitudine visuale differisce leggermente dalla curva di sensibilità dell'occhio, soprattutto per le stelle di colore rosso. I modelli più precisi tengono conto anche di questo fatto, che comunque produce differenze di qualche decimo di magnitudine.

Come raggiungere la magnitudine limite

Il raggiungimento della magnitudine limite imposta dalle condizioni di cielo e dalle altre variabili citate, dipende anche da un'opportuna tecnica e abilità di osservazione, che si raggiungono solamente con l'esperienza.

I principianti dell'osservazione visuale non difficilmente raggiungono, alle prime osservazioni, i valori che invece altri osservatori esperti, sotto le stesse condizioni e con strumenti identici, riescono facilmente a percepire.

La visione telescopica, in effetti, non è per nulla naturale e l'occhio ha la necessità di essere allenato ed istruito alle osservazioni telescopiche.

Alcuni accorgimenti sono comunque universali e rappresentano un buon punto di partenza.

Prima di tutto è indispensabile avere **l'occhio adattato al buio**. L'adattamento totale all'oscurità permette di guadagnare quasi una magnitudine, sebbene non sia facile da raggiungere perché è indispensabile non avere fonti di luce nei paraggi. Nei cieli inquinati da luci, raggiungere l'adattamento all'oscurità è impossibile, e questo si verifica quando il cielo brilla di magnitudine superficiale circa 18,5 ovvero quando la magnitudine limite ad occhio nudo è pari o inferiore alla 4,5. Sotto queste condizioni il non adattamento al buio peggiora le cose, abbassando il valore della magnitudine limite: un altro notevole svantaggio dei cieli inquinati dalle luci.

Una tecnica molto conosciuta dagli osservatori visuali è la cosiddetta **visione distolta**, ovvero l'osservazione condotta sfruttando le parti periferiche della retina, dove sono concentrati i bastoncelli, ricettori 10 volte più sensibili dei coni posti al centro.

Stimare la qualità del cielo

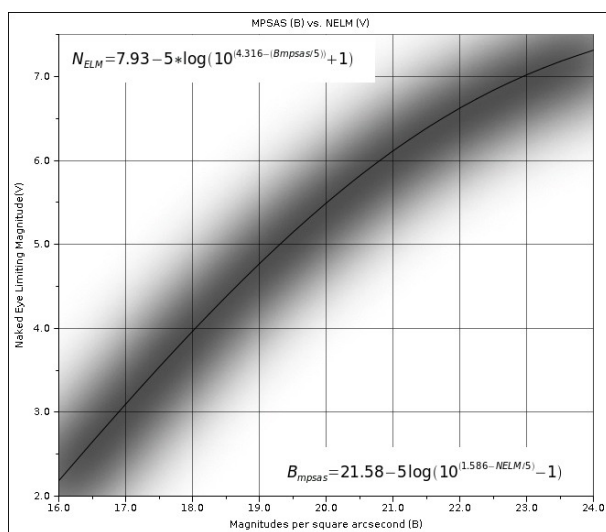
La determinazione della magnitudine limite non può prescindere dalla qualità del cielo, per questo ogni astrofilo deve conoscere perfettamente quanto è scuro il cielo dal quale osserva.

La qualità del cielo si può stimare attraverso la magnitudine limite ad occhio nudo oppure, in modo più rigoroso, attraverso la brillantezza superficiale, ovvero la luminosità di una porzione di area unitaria (generalmente 1").

In questi anni un accessorio, chiamato Sky Quality Meter, abbreviato in SQM, è diventato un must per tutti i visualisti nella stima della luminosità del cielo stellato. Questo strumento fornisce, in pochi secondi, la magnitudine superficiale media della zona nella quale è stato indirizzato, fornendo un ottimo punto di partenza sulla stima della magnitudine limite raggiungibile attraverso la formula ricavata in questo articolo.

Ci sono anche altri metodi per stimare la qualità del cielo, che prendono in esame la magnitudine limite raggiungibile ad occhio nudo e non richiedono alcuno strumento.

Brillantezza superficiale e magnitudine limite ad oc-



Relazione tra la brillantezza superficiale del cielo e la magnitudine limite ad occhio nudo, due quantità che determinano la qualità del cielo, quindi anche la magnitudine limite stellare visibile con un certo telescopio.

chio nudo sono infatti quantità legate, sebbene dipendenti dal diverso comportamento dell'occhio umano da un osservatore ad un altro.

Conoscendo uno dei due dati possiamo ricavare l'altro, attraverso delle semplici relazioni matematiche.

Se conosciamo la brillantezza superficiale attraverso lo SQM possiamo ricavare la magnitudine m_{eye} , ovvero $m_{eye} = 7,93 - 5 \log(10^{(4,316 - (B/5))} + 1)$ ed inserire questo valore nella formula per il calcolo di quella limite. Se conosciamo m_{eye} e vogliamo capire a quale valore di brillantezza superficiale corrisponde, possiamo usare questa relazione: $B = 21,58 - 5 \log(10^{(1,586 - (m_{eye}/5))} - 1)$. Nella tabella 2 possiamo vedere la corrispondenza tra queste due quantità.

Queste relazioni sono molto importanti anche per conoscere la qualità del cielo dal quale si osserva. I cieli più bui arrivano a valori di brillantezza superficiale pari a 21,9-22, mentre i più scuri cieli italiani raggiungono a malapena e raramente 21,7. In pianura padana, una delle zone più inquinate d'Europa, valori massimi sono attorno a 20,5-20,7, con punte di 17,5-18 all'interno delle grandi città.

Un nuovo modello ed una nuova formula

Considerando alcune delle variabili citate nelle righe precedenti e prendendo in esame il comportamento medio degli osservatori, possiamo cercare di sviluppare una formula più accurata, che tenga conto, ad esempio, almeno della qualità del cielo dal quale si osserva.

Il lavoro imponente di Schaefer, citato all'inizio di questo articolo, rappresenta un ottimo punto di riferimento. Il modello sviluppato dall'astronomo della NASA, a partire da 314 osservazioni indipendenti, produce risultati piuttosto convincenti, con incertezze massime che raramente superano la mezza magnitudine.

A causa della complessità del problema non è possibile fornire una formula semplice che contenga tutte le variabili prese in esame. Un'ottima risorsa per conoscere un valore piuttosto attendibile si trova a questo indirizzo: <http://www.go.ednet.ns.ca/~larry/astro/maglimit.html>. L'algoritmo di calcolo in questa pagina web si basa proprio sulle variabili appena analizzate e sul modello sviluppato da Schaefer, attualmente il migliore in circolazione.

Se quello che ci serve è una formula sintetica e facile da applicare anche durante le osservazioni, senza dover consultare un sito web ed inserire troppe variabili, possiamo cercare di ricavarla modificando quelle già esistenti e confrontandole con le osservazioni.

Potremmo semplicemente modificare la relazione classica variando il termine costante, ma questo non è conveniente poiché la costante dovrebbe cambiare in funzione della qualità del cielo e del diametro strumentale, rendendo, di fatto, difficoltosa la sua applicazione.

Gerald North, astronomo ed astrofilo molto esperto, ha ricavato una relazione che ben si adatta ai dati di sperimentali in possesso di Schaefer: $m_{lim} = 4,5 + 4,4 \log D$. Sfortunatamente essa non contiene la variabile che più influenza la misurazione, ovvero la qualità del cielo.

Tenendo conto di questo fattore imprescindibile, possiamo modificare leggermente la formula ed arrivare finalmente alla **relazione per la magnitudine limite stellare**: $m_{lim} = m_{eye} - 2 + 4,4 \log D$ dove m_{eye} è la magnitudine limite ad occhio nudo della zona di cielo nella quale si osserva, e D è il diametro dello strumento espresso in millimetri.

Questa relazione è approssimata, non tenendo conto, ad esempio, dell'ostruzione dello strumento o della trasmissione della luce dei diversi schemi ottici.

La formula ha un significato statistico e rappresenta la magnitudine stellare limite raggiungibile con ogni strumento ottico, se il seeing è buono, se possiamo variare l'ingrandimento a piacere fino a raggiungere il contrasto massimo, e se abbiamo già una certa esperienza con le osservazioni telescopiche.

Il valore che ricaviamo non può comunque essere preso alla lettera, poiché l'acutezza visiva è variabile da un osservatore all'altro e può introdurre errori anche superiori alla mezza magnitudine. Possiamo affermare, allora, che il valore fornito dalla formula è valido, entro mezza magnitudine, per circa l'85% degli osservatori.

La relazione ricavata rappresenta un'ottima approssimazione solamente per strumenti nei quali è possibile variare l'ingrandimento e raggiungere il massimo contrasto con il fondo cielo, ma non è applicabile ai binocoli o alla visione ad occhio nudo. Se, infatti, inseriamo le dimensioni della pupilla dell'occhio umano (7 mm), otteniamo un valore limite attorno alla magnitudine 8,2 per cieli scuri, ovvero almeno 1,5 magnitudini superiore a quello realmente misurabile. Questa magnitudine è effettivamente raggiungibile se i nostri occhi riuscissero ad ingrandire le immagini di almeno 30 volte. A questi ingrandimenti il fondo cielo diventa praticamente nero e l'occhio umano si avvicina al limite della magnitudine 8, il quale corrisponde, come detto in precedenza, all'oggetto puntiforme più debole che si osserverebbe se lo sfondo fosse completamente nero.

Il modello completo di Schaefer riesce a prevedere accuratamente anche questi casi in cui non si può raggiungere il contrasto ideale, ma non abbiamo trovato conveniente considerare questa variabile nello sviluppo della formula, la quale è quindi veritiera solamente osservando attraverso i telescopi.

La qualità del cielo, espressa attraverso la magnitudine limite ad occhio nudo (m_{eye}) può essere espressa anche in termini di brillantezza artificiale. I due metodi sono equivalenti e spiegati nel box. Nella tabella 3 sono riportate alcune osservazioni condotte sotto diversi cieli e con strumenti di vario diametro, confrontate con le previsioni della nostra nuova formula. La magnitudine osservata è una media di circa 10 osservazioni indipendenti, sotto condizioni per quanto possibile simili.

I risultati forniti sono piuttosto accurati ma non devono essere presi alla lettera.

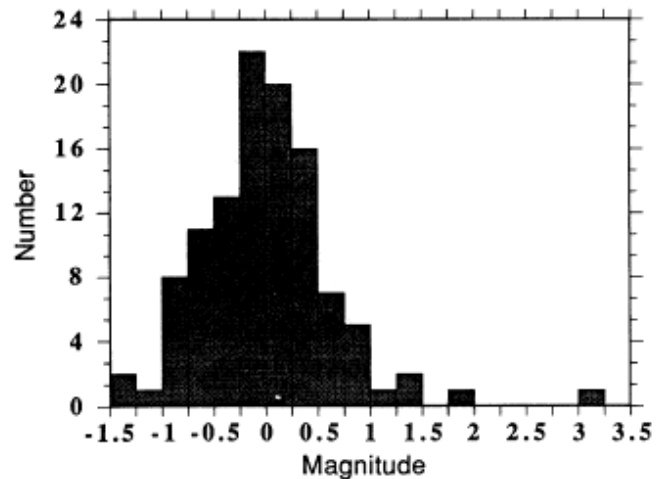
Famoso è il caso dell'astrofilo Stephen O'Meara, dotato di una acutezza visiva eccezionale, tanto da riuscire ad osservare, mediamente, stelle di almeno una magnitudine più deboli rispetto a tutti gli altri osservatori. Dall'altra parte, questi valori sono leggermente troppo ottimistici per i novizi.

In conclusione

Abbiamo visto come la formula classica per la magnitudine limite non solo non prende in esame alcune importanti variabili, come la qualità del cielo, ma produce risultati piuttosto differenti dalla realtà, poiché sviluppata oltre 60 anni fa, quando la qualità e trasparenza delle ottiche erano di gran lunga inferiori alle attuali.

Analizzando le variabili e partendo dalle numerose osservazioni, abbiamo ricavato un modello più complesso ma molto più preciso, ed una formula che, sebbene approssimata, ben si adatta alle osservazioni condotte attraverso i moderni strumenti.

Abbiamo imparato, inoltre, se mai ce ne fosse bisogno, che la magnitudine limite, ovvero la possibilità di osservare oggetti deboli, dipende moltissimo dalla qualità del cielo. Un telescopio da 100 mm utilizzato in un luogo molto buio permette di osservare stelle deboli quanto uno strumento da 250 mm utilizzato da un tipico cielo cittadino (vedi tabella 3)!



Sebbene la magnitudine limite dipende criticamente anche dall'acutezza visiva, diversa per ogni individuo, le previsioni del modello di Schaefer e della nuova formula proposta nell'articolo si adattano molto bene per un grande numero di osservatori. Il modello proposto è il migliore attualmente in circolazione e riesce a prevedere la magnitudine limite stellare per un occhio umano nella media.

Alcuni link per approfondire

<http://www.go.ednet.ns.ca/~larry/astro/maglimit.html>: programma per il calcolo della magnitudine limite secondo il modello di Schaefer accennato in questo articolo

<http://articles.adsabs.harvard.edu/full/1990PASP..102..212S/0000212.000.html>: l'articolo di Schaefer nel quale sono raccolte le osservazioni e il modello sviluppato per la magnitudine limite stellare.

<http://web.telia.com/~u41105032/visual/Schaefer.htm>: discussione e spiegazione dettagliata dell'articolo di Schaefer

<http://adsabs.harvard.edu/full/2000MmSAI..71...83G>: discussione sulla magnitudine limite a partire dal lavoro di Schaefer

Tabella 1: confronto tra la magnitudine osservata e le previsioni della formula classica: $m_{\text{lim}} = 6,8 + 5 \log D$. La magnitudine osservata si riferisce a stelle poste allo zenit e con magnitudine limite ad occhio nudo pari alla 6,2-6,5

Telescopio	Magnitudine limite teorica	Osservata
10cm	11,8	13,2
15cm	12,7	13,7
20cm	13,3	14,2
25cm	13,8	14,8
30cm	14,2	15,5
40cm	14,8	16,3

Tabella 2: confronto tra la brillantezza superficiale del cielo e la magnitudine limite ad occhio nudo allo zenit. La magnitudine limite ad occhio nudo corrispondente ad ogni valore di brillantezza è stato ricavato con la formula: $m_{\text{eye}} = 7,93 - 5 \log(10^{(4,316 - (B/5))} + 1)$

Magnitudine superficiale del cielo	Magnitudine limite ad occhio nudo
22,0	6,6
21,5	6,4
21,0	6,1
20,5	5,8
20,0	5,5
19,5	5,1
19,0	4,8
18,5	4,4
18,0	4,0
17,5	3,5

Tabella 3: Confronto tra la magnitudine limite osservata al telescopio, in funzione della qualità del cielo, e il valore predetto dalla nuova formula: $m_{\text{lim}} = m_{\text{eye}} - 2 + 4,4 \log D$. La magnitudine osservata è la media di circa 10 osservazioni, che si accorda ottimamente con le previsioni della formula.

Diametro del telescopio	Mag. limite ad occhio nudo	Mag. Limite al telescopio (media)	Mag. limite calcolata con la nuova formula
100 mm	6,5	13,2	13,3
150 mm	6,4	14,0	14,0
200 mm	5,0	13,2	13,1
250 mm	4,4	13,3	13,0