

Pianeti extrasolari in transito: calcolo di alcuni importanti dati

di Daniele Gasparri

Attraverso alcune considerazioni geometriche di base sviluppiamo un apparato di formule utili per calcolare alcuni importanti parametri planetari letti nelle curve di luce: raggio, durata massima del transito, inclinazione dell'orbita, massa e densità media.

Cerchiamo di dimostrare come si ricavano importanti dati nello studio della curva di luce che rappresenta il transito di un pianeta extrasolare. Le formule che ricaveremo partono da concetti piuttosto semplici e, per semplificare i calcoli, fanno uso di qualche approssimazione. Sta all'osservatore capire se le approssimazioni fatte sono valide o meno e quale errore viene introdotto dall'averle considerate. Come spesso succede, per eliminare delle approssimazioni si devono complicare notevolmente i calcoli, con il rischio di introdurre errori di misura che portano a risultati peggiori.

Le dimostrazioni delle relazioni richiedono conoscenze di trigonometria e di algebra; capirle fino in fondo non è importante, piuttosto spero serva a far capire come si ricavano dati astronomici e come lavora un astronomo, professionista o dilettante, con un buon background scientifico.

Il nostro scopo è quello di calcolare alcuni importanti parametri del pianeta in transito, dalla sola analisi della curva di luce.

Da essa abbiamo sostanzialmente tre dati principali: profondità, durata, periodo di rivoluzione. E' importante che la profondità venga espressa in termini di flusso piuttosto che in magnitudini. La conversione è semplice una volta trovato il punto di zero, che si ottiene studiando la luce stellare fuori dal transito (OOT)

Da altre osservazioni conosciamo un limite inferiore alla massa ($M \sin i$) attraverso le misure di velocità radiale, e il raggio della stella, determinabile, almeno in prima approssimazione, attraverso lo studio fotometrico in due diversi indici di colore.

I dati che possiamo scoprire sul pianeta sono:

- 1) Raggio
- 2) Inclinazione dell'orbita
- 3) Massa esatta
- 4) densità media.

Queste 4 grandezze si determinano solamente osservando un transito e per questo sono estremamente importanti per capire composizione e proprietà dei pianeti extrasolari.

Cominciamo la nostra dimostrazione enunciando le approssimazioni che faremo:

- Stella a simmetria sferica; lo schiacciamento polare è trascurabile
- La velocità orbitale del pianeta (e della stella) è costante durante l'intera durata del transito
- La curvatura dell'orbita planetaria è trascurabile durante il transito

- Problema dei due corpi. Si considera quindi solamente al stella e il pianeta, escludendo la presenza di altri eventuali corpi.

Il dato più facile da ricavare è il raggio del pianeta, supponendo di conoscere quello della stella. Il raggio stellare, come vedremo più avanti, è abbastanza facile da stimare a partire dall'analisi fotometrica in due lunghezze d'onda diverse (indici di colore) utilizzando i modelli stellari finora noti (e abbastanza corretti, vedi diagramma HR)

E' facile intuire che il raggio del pianeta è influenzato dalle dimensioni reciproche stella e pianeta e dal calo di luminosità. Supponiamo, per assurdo, che il raggio planetario è uguale a quello stellare. Se il transito è centrale, la caduta di luce è infinita, ovvero la luce della stella viene completamente nascosta dal disco del pianeta. Mano a mano che la superficie planetaria diminuisce, diminuisce anche il calo di luminosità che essa provoca quando passa davanti alla stella.

In effetti, da questa semplice analisi abbiamo già ricavato la formula per il calcolo del raggio:

- **Raggio del pianeta:** $R_p = R_* \sqrt{\frac{\Delta F}{F}}$ dove $\frac{\Delta F}{F} = \frac{F_{out} - F_{transit}}{F_{out}}$ con F_{out} = flusso

stellare fuori dal transito, generalmente normalizzato al valore 1, $F_{transit}$ = profondità del transito, in termini di flusso. E' importante notare come non si usano le magnitudini ma i flussi stellari, per questo è sempre opportuno lavorare con queste grandezze. Quando si effettuano operazioni bisogna sempre trasformare le magnitudini in flussi, attraverso la formula di Pogson. Vediamo un esempio concreto.

Supponiamo di misurare il transito di un pianeta extrasolare. Dall'analisi dei dati provenienti dalla stella prima (o dopo) il transito, determiniamo il cosiddetto plateau, ovvero il punto di zero. Questo rappresenta la luminosità della stella fuori dal transito, alla quale assegniamo il valore arbitrario pari ad 1. Durante il transito, la luce stellare diminuisce di una certa quantità rispetto al flusso totale, generalmente compresa tra 2 centesimi e 5 millesimi rispetto al flusso totale. Supponiamo che il calo è di 1 centesimo; se la parte fuori transito avrà un flusso pari ad 1, la profondità raggiunta avrà un valore pari a 0,99. Possiamo a questo punto calcolare il rapporto tra il raggio stellare

e quello planetario: $\frac{R_p}{R_*} = \sqrt{\frac{\Delta F}{F}}$, se F = flusso fuori transito = 1, allora:

$$\frac{R_p}{R_*} = \sqrt{\Delta F} = \sqrt{1 - F_{min}} \quad \text{dove } F_{min} = \text{flusso minimo misurato, ovvero profondità}$$

massima del transito. Nel nostro caso si ha $F_{min} = 0,99$, quindi:

$$\frac{R_p}{R_*} = \sqrt{1 - 099} = \sqrt{0,01} = 0,1; \text{ il raggio del pianeta è 10 volte inferiore a quello}$$

della stella. Se la stella ha le dimensioni del Sole, ovvero $R_* \approx 7 \cdot 10^5 \text{ Km}$, allora $R_p \approx 70000 \text{ Km}$ ovvero le dimensioni di Giove.

Le precisioni attuali della strumentazione amatoriale permettono di scoprire transiti con profondità di 5 millesimi di magnitudine, circa pari a 5 millesimi in termini di flusso; questo significa identificate pianeti di raggio circa 15 volte inferiore a quello della propria stella.

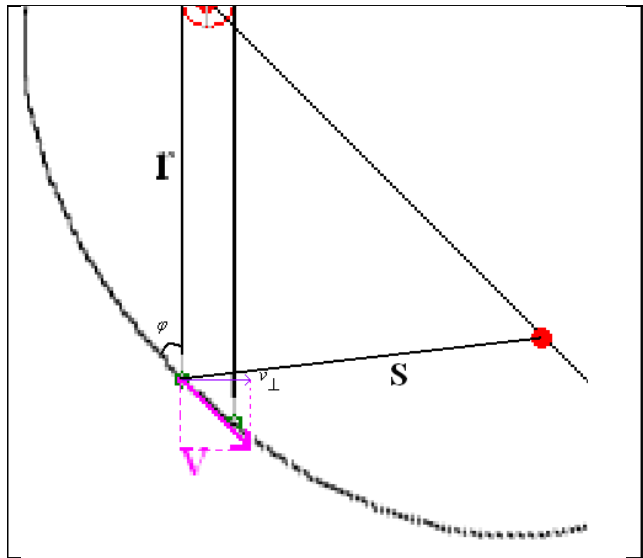
Se consideriamo che esistono stelle di classe M, con raggi pari ad 1/3 di quello solare, arriviamo a diametri dei pianeti transitanti di circa 15000 Km, solamente due volte più grandi della Terra.

- **Inclinazione dell'orbita planetaria:**

Per calcolare questo dato fondamentale per affinare la conoscenza dell'orbita planetaria, occorre prima di tutto, stimare la durata massima del transito, ovvero la durata di un transito centrale, che si verifica solamente quando l'inclinazione dell'orbita del pianeta è esattamente di 90° rispetto all'osservatore ($D_{Max} \rightarrow i = 90^\circ$).

Generalmente la durata misurata del transito è minore della massima durata teorica, in quanto avviene lungo una corda della circonferenza stellare e non lungo il diametro. Determinare la massima durata del transito è importante per scoprire dati importanti, quali l'inclinazione esatta dell'orbita.

Dalla figura possiamo vedere come la durata del transito sarà uguale a due volte il raggio totale (stella + pianeta) divisa la componente della velocità orbitale totale perpendicolare all'osservatore:



$D_{Max} = \frac{2R_{Tot}}{v_{Tot\perp}}$. Di questa formula ci manca sostanzialmente proprio la componente della

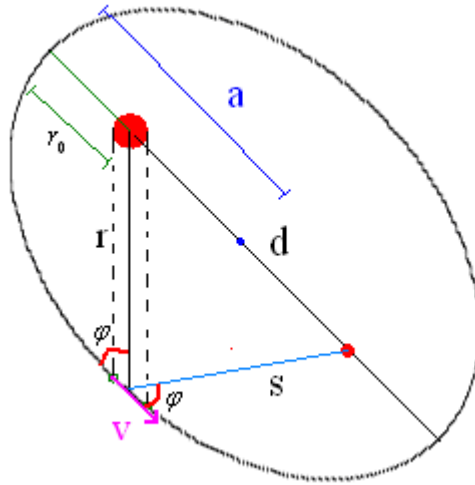
velocità $v_{Tot\perp}$, poiché i raggi li conosciamo già.

Cerchiamo, allora, di scrivere il dato che ci manca rispetto ad altri che conosciamo. Facendo uso della trigonometria, possiamo scomporre $v_{Tot\perp}$ come:

$v_{Tot\perp} = v_{Tot} \sin \varphi$ dove φ è l'angolo compreso tra l'orbita (la tangente nel punto di transito) ed r , ovvero la linea congiungente la stella, il pianeta e l'osservatore.

1) Ricaviamoci $\sin \varphi$ attraverso quantità conosciute:

Consideriamo la seguente configurazione:



Attraverso teoremi trigonometrici (teorema di Carnot e teorema dei seni) possiamo scri-

vere: $\sin \phi = \sqrt{\frac{(r_p + s_p)^2 - d^2}{4r_p s_p}}$ Le quantità contenute sono però sconosciute, meglio

modificare la relazione e scriverla in termini di una quantità semplice e conosciuta, come l'eccentricità orbitale del pianeta, che si ricava da studi sulla velocità radiale. Consideriamo, allora, le equazioni che regolano il problema dei due corpi sottoposti alla mutua interazione gravitazionale:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = r(\phi = 0) = \frac{a_p(1 - e^2)}{1 + e} \\ d = 2a_p - 2r_0 = 2 \left(a_p - \frac{a_p(1 - e^2)}{1 + e} \right) = 2a_p \left(1 - \frac{(1 - e^2)}{1 + e} \right) \\ r_p = \frac{a_p(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi} \\ s_p + r_p = \text{const} = s_0 + r_0 = 2a_p \Rightarrow s_p = 2a_p - r_p \end{array} \right.$$

Inserendo le relazioni trovate nella formula del $\sin \phi$ abbiamo:

$$\sin \phi = \sqrt{\frac{1 - e^2}{(1 + e)^2} (1 + e \cos \phi) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^2} \right)}$$

Calcoliamo v_{Tot} :

2) v_{Tot}

La velocità orbitale totale è la combinazione delle velocità orbitali della stella e del pianeta. Per ricavare il suo valore attraverso quantità che conosciamo, consideriamo l'orbita stellare e planetaria e le relative velocità angolari, che naturalmente devono essere le stesse:

$$\omega_S = \omega_P \rightarrow \frac{v_P}{r_P} = \frac{v_S}{r_S} \rightarrow v_S = \frac{r_S}{r_P} v_P.$$

Utilizzando la relazione per il calcolo del centro di massa del sistema: $m_P r_P = m_S r_S$ possiamo scrivere: $v_S = \frac{m_P}{m_S} v_P$. La velocità totale allora è: $v_{Tot} = v_P \left(1 + \frac{m_P}{m_S} \right)$

Il valore v_P è ancora sconosciuto. Utilizzando la relazione per la velocità orbitale per orbite ellittiche, si ha: $v_P = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_P} - \frac{1}{a_P} \right)}$ eliminando r_P e a_P attraverso la definizione

ne dell'equazione dell'ellisse (scritta in coordinate polari): $r_P = \frac{a_P(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$ e la terza

legge di Keplero $a_P = \left(\frac{GP^2 M}{4\pi^2} \right)^{1/3}$:

$$v_P = \sqrt{\left(\frac{2\pi GM}{P} \right)^{2/3} \left(\frac{2(1 + e \cos \phi)}{1 - e^2} - 1 \right) e}$$

$$v_{Tot} = \left(1 + \frac{m_P}{m_S} \right) \sqrt{\left(\frac{2\pi GM}{P} \right)^{2/3} \left(\frac{2(1 + e \cos \phi)}{1 - e^2} - 1 \right) e}.$$

Finalmente, la durata per un transito centrale può essere scritta nel seguente modo:

$$D_{Max} = \frac{2R_{Tot}}{\left(\frac{2\pi GM}{P} \right)^{1/3} \left(\frac{2(1 + e \cos \phi)}{1 - e^2} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{1 - e^2}{(1 + e)^2} (1 + e \cos \phi) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^2} \right) \right)^{1/2} \left(1 + \frac{m_P}{m_S} \right)}$$

Vi sono quantità non conosciute a priori, come M, ovvero la somma delle masse (pianeta + stella). Fortunatamente queste quantità sono sotto radice cubica o sotto rapporti molto piccoli ($\frac{m_P}{m_S}$), per questo gli errori che si commettono sono generalmente modesti. Inol-

tre, il metodo si può applicare in sequenza: inizialmente non conosciamo con precisione la massa del pianeta ma solo il prodotto $m \sin i$. Si inserisce questo valore, si calcola la durata massima e poi l'inclinazione. Da essa si ottiene un primo valore per la massa del pianeta. A questo punto possiamo usare questo nuovo valore per replicare i passaggi: si inserisce nella formula appena trovata che darà un valore più preciso della durata massima e quindi dell'inclinazione. Il procedimento converge molto rapidamente e già dopo 2-3 interazioni si ha un risultato che non si discosta più da quello reale.

Per semplificare la relazione, possiamo definire delle costanti:

$$\left(1 + \frac{m_P}{m_S}\right) = A$$

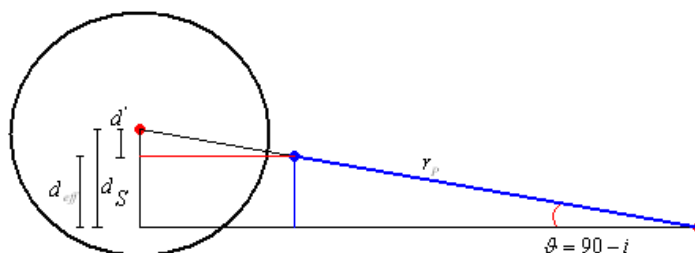
$$\left(\frac{1 - e^2}{(1 + e)^2} (1 + e \cos \phi) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^2}\right)\right)^{1/2} = B$$

; possiamo considerare A e B come dei valori di correzione che tengono conto del moto orbitale della stella attorno al centro di massa e della geometria del transito.

$$D_{Max} = \frac{2R_{Tot}}{\left(\frac{2\pi GM}{P}\right)^{1/3} \left(\frac{2(1 + e \cos \phi)}{1 - e^2} - 1\right)^{1/2}} \frac{1}{A B} = \frac{D_0}{A B}$$

Finalmente possiamo calcolare l'inclinazione orbitale.

Prima, però, dobbiamo fare una considerazione sulla geometria del sistema e ricordare che entrambi gli oggetti (stella e pianeta) ruotano attorno al comune centro di massa. Consideriamo la seguente configurazione:

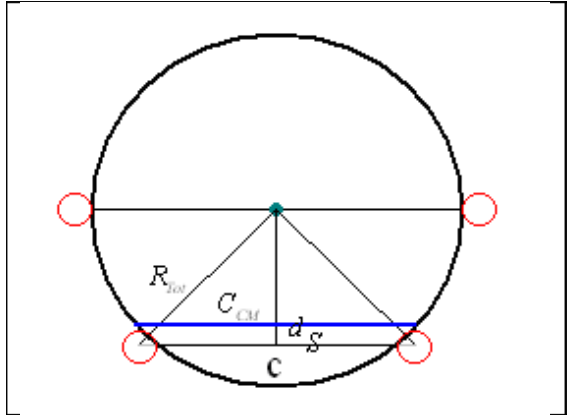


Poiché la stella generalmente non si trova nel fuoco dell'ellisse, per calcolare l'inclinazione, la quale è funzione della corda C , dobbiamo inserire il valore C_{CM} , ovvero la corda teorica come se la stella fosse nel fuoco dell'ellisse. Questo si calcola facilmente attraverso qualche relazione trigonometrica:

$$d_{eff} = r_p \cos i$$

$$C_{CM} = 2\sqrt{R_{Tot}^2 - d_{eff}^2}$$

$$= 2\sqrt{R_{Tot}^2 - r_p^2 \cos^2 i}$$



Considerando la durata del transito per $i = 90^\circ$ e quella misurata dalla curva di luce, abbiamo:

$$\begin{cases} D_1 = \frac{C}{v} \\ D_{Max} = \frac{2R_{Tot}}{v} \end{cases} \Rightarrow \frac{D_{Max}}{D_1} = \frac{2R_{Tot}}{C} = \frac{R_{Tot}}{\sqrt{R_{Tot}^2 - r_p^2 \cos^2 i}}$$

Risolvendo per i ed eliminando r_p :

$$i = \arccos \left[\frac{R_{Tot} \sqrt{D_{Max}^2 - D_1^2}}{\left(\frac{GP^2 M}{4\pi^2} \right)^{1/3} \left(\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \phi} \right) D_{Max}} \right]. \text{ Da questa formula possiamo calcolare}$$

l'inclinazione esatta dell'orbita planetaria, a partire dalla conoscenza di parametri noti. Questa, come già detto, può essere iterata con la formula per la durata teorica e la massa, per ottenere valori via via più precisi.

- **Massa:** Le misure di velocità radiale, necessarie per confermare che il corpo transitante sia effettivamente un pianeta, consentono di ricavare solamente una stima della massa. Attraverso queste osservazioni è impossibile ricavare l'inclinazione, quindi la massa, poiché le due grandezze sono collegate da una relazione matematica che deriva dalla trattazione fisica del problema dei due corpi. Attraverso le misure di velocità

radiale, abbiamo solamente il prodotto $m \sin i$; ora che conosciamo l'inclinazione, possiamo trovare la massa esatta del pianeta: $m_p = \frac{m \sin i}{\sin i}$

- **Densità media:** Se supponiamo il pianeta a simmetria sferica (abbastanza esatto per gli errori che abbiamo), dalla conoscenza della massa e del raggio ci possiamo ricavare subito la densità media: $\langle \rho \rangle = \frac{M_p}{\frac{4}{3}\pi R_p^3}$. Questa grandezza ci fornisce importanti

dati sulla struttura e composizione del corpo celeste. Una densità minore di quella dell'acqua suggerisce un corpo gassoso, simile a Saturno o Giove; una densità superiore a $2g/cm^3$ è invece indice di un corpo in parte roccioso.

Attraverso dei modelli di formazione ed evoluzione, siamo in grado di prevedere anche una rozza struttura interna dalla semplice conoscenza della densità.